KTH Teknikvetenskap

SF1624 ALGEBRA OCH GEOMETRI
SEMINARIEUPPGIFTER OCH REKOMMENDERADE UPPGIFTER FÖR VECKA 1
HT10

Se www.kth.se/social/course/SF1624 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

UPPGIFTER TILL SEMINARIE 1

Uppgift 1. Lös de linjära ekvationssystemen

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ -x + 4y = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = -5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 2 \\ 5\alpha + 8\beta = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ -x + 4y + z = 5 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ -8x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

Uppgift 2. Använd Gausselimination för att reducera följande totalmatriser[1] till reducerad trappstegsform[2] och använd detta till att skriva upp lösningen till motsvarande ekvationssystem.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -10 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -10 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Uppgift 3. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna potenserna A^n, för $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
(b) Använd ett linjärt ekvationssystem och Gausselimination för att bestämma konstanter a och b så att $A^2 + aA + bI = 0$, där I är identitetsmatrisen av storlek 2×2.

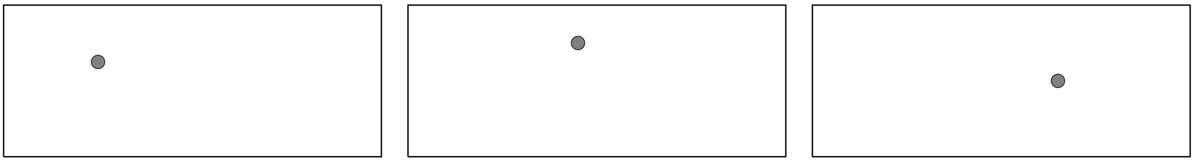
[1] augmented matrices
[2] reduced row-echelon form

Uppgift 4. Avgör för vilka högerled (b_1, b_2, b_3) det finns en lösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & b_2 \\ -8x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

och bestäm lösningen i dessa fall.

Uppgift 5. Enligt de enkla modellerna för kaströrelse kommer en boll som kastas iväg att beskriva en *kastparabel*, dvs en andragradskurva som kan beskrivas med $y = ax^2 + bx + c$. Avgör var bollen träffar ramen då följande tre bilder är tagna av en boll i en kaströrelse genom att använda linjära ekvationssystem på lämpligt sätt.



Uppgift 6. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Använd radoperationer för att skriva matrisen A som en produkt av elementära matriser.
(b) Hur kan vi använda räkningarna för att beräkna inversen av A?

Uppgift 7. För varje positivt heltal n kan vi bilda $n \times n$-matrisen A_n genom

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j, \\ -i & \text{om } j = i + 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi får exempelvis att

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Förklara varför A_n är inverterbar för alla positiva heltal n.
(b) Beräkna inversen till A_n för alla positiva heltal n.

REKOMMENDERADE UPPGIFTER

Utöver ovanstående seminarieuppgifter rekommenderas följande uppgifter från kursboken till självstudier och övningar:

Kapitel 1 — Linjära ekvationssystem och matriser		
1.1.	Introduktion till linjära ekvationssystem	15, 16, 17
1.2	Gausselimination	5, 7, 27, 35, 37, 42
1.3	Matriser och matrisoperationer	3, 4, 5, 7, 12, 14
1.4	Inverser, algebraiska egenskaper hos matriser	4, 8, 10, 11, 12, 13, 18abc, 28
1.5	Elementära matriser och en metod för att bestämma A^{-1}	9, 14, 25
1.6	Mer om linjära ekvationssystem och inverterbara matriser	3, 4, 9, 10, 16
1.7	Diagonalmatriser, triangulära och symmetriska matriser	27, 33